Ejercicio 1

Problema 1.15.8 *(3 puntos)* Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ tiene determinante igual a 10, se pide calcular justificadamente:

a) (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2a+b & b & c \\ 4 & 2 & 3 \\ 2x+y & y & z \end{pmatrix}$.

b) (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2a & 2b & 2c \end{pmatrix}$.

c) (1 punto). El determinante de la matriz $(BB^t)^3$, donde $B = \begin{pmatrix} a+2 & b+4 & c+6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ y B^t es la matriz transpuesta de B.

Solución:

a) $$\begin{vmatrix} 2a+b & b & c \\ 4 & 2 & 3 \\ 2x+y & y & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b & c \\ 2 & 2 & 3 \\ 2x & y & z \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & c \\ 2 & 2 & 3 \\ y & y & z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 20$$

b) $$\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -60$$

c) $$|B| = \begin{vmatrix} a+2 & b+4 & c+6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 10$$

$$|(BB^t)^3| = |BB^t|^3 = (|B||B^t|)^3 = (|B|^2)^3 = |B|^6 = 10^6$$

Ejercicio 2

Problema 1.15.9 *(3 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Determinar el valor o valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1}.

b) (1 punto). Para $a = -2$, hallar la matriz inversa A^{-1}.

c) (1 punto). Para $a = 1$, calcular todas las soluciones del sistema lineal $AX = O$.

a) $|A| = -a(a^2 - 3a + 2) = 0 \Longrightarrow a = 0,\ a = 1$ y $a = 2$.
Si $a = 0$ o $a = 1$ o $a = 2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.
Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/12 & 1/3 & -1/4 \\ -5/24 & -1/6 & -1/8 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Si $a = 1$ y $AX = O$ tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 3

Problema 1.25.10 *(2,5 puntos)* Halle un número natural de tres cifras del que se conoce que: sus cifras suman 13; si al número dado se le resta el doble del número que resulta de intercambiar las cifras de las centenas y de las unidades, el resultado es 437; además, la cifra de las decenas excede en una unidad a la media aritmética de las otras dos cifras.

Solución:

Sea x la cifra de las centenas, y la cifra de las decenas y z la de las unidades. El número según se lee es xyz que corresponde al $100x + 10y + z$.

$$\begin{cases} x+y+z=13 \\ 100x+10y+z-2(100z+10y+x)=437 \\ y-1=\dfrac{x+z}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=13 \\ 98x-10y-199z=437 \\ x-2y+z=-2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=5 \\ z=1 \end{cases}$$

El número buscado es 751.

Solución del sistema por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 98 & -10 & -199 & 437 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-98F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & -15 \\ 0 & -108 & -297 & -837 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -3y=-15 \Longrightarrow y=5 \\ -540-297z=-837 \Longrightarrow z=1 \\ x+5+1=13 \Longrightarrow x=7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=5 \\ z=1 \end{cases}$$

Ejercicio 4

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$**, calcula, si es posible, la matriz** X **que verifica la ecuación** $3X-B^t=AX$ **, siendo** B^t **la matriz traspuesta de** B

R E S O L U C I Ó N

Despejamos la matriz X: $3X-B^t=AX \Rightarrow 3X-AX=B^t \Rightarrow (3I-A)X=B^t \Rightarrow X=(3I-A)^{-1}\cdot B^t$

Calculamos la matriz

$$C=3I-A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa

$$C^{-1}=\frac{(C^{adj})^t}{|C|}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ -2 & 12 & -5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X=(3I-A)^{-1}\cdot B^t=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -11 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5 (Hacerlo en clase)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a) (1'5 puntos) Estudia el rango de A según los valores de m.

b) (1 punto) Para $m=2$, calcula la inversa de $2020A$.

b) Calculamos la inversa de $2020A$ para $m=2$:

$$|2020A| = 2020^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2020^3 \cdot (5-6-8) = 2020^3 \cdot (-9)$$

$$(2020A)^{Adj} = 2020^2 \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 5 & -3 & -2 \\ -7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left((2020A)^{Adj}\right)^t = 2020^2 \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2020A)^{-1} = \frac{\left((2020A)^{Adj}\right)^t}{|2020A|} = \frac{2020^2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}{2020^3 \cdot (-9)} = -\frac{1}{18180} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6 (Hacer en clase)

Problema 1.25.8 *(2,5 puntos)* Como es bien sabido, la siguiente igualdad de determinantes

$$\det(A+B) = \det A + \det B$$

no es cierta en general.

a) (0,75 puntos) Si A y B son dos matrices para las que $\det(A+B)=\det A+\det B$, pruebe que entonces

$$\det((A+B)^2) = \det(A^2) + \det(B^2) + 2\det(AB).$$

b) (1 punto) Dadas las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

determine el único valor de α con el que sí se cumple la igualdad $\det(C+D)=\det C+\det D$.

c) (0,75 puntos) Para el valor $\alpha=-1$, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.

Solución:

a) $|(A+B)^2| = |A+B|^2 = (|A|+|B|)^2 = |A|^2+|B|^2+2|A||B| = |A|^2+|B|^2+2|AB|$

b) $|C+D| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha+2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = 4\alpha$, $|C| = 2\alpha+2$ y $|D| = 2$.

$|C+D| = |C|+|D| \Longrightarrow 4\alpha = 2\alpha+2+2 \Longrightarrow \alpha = 2$

Ejercicio 7 (Hacer en clase)

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

a) (1 Punto). Sabiendo que una matriz X verifica $X^3AX=B^2$, halla los posibles valores de su determinante.

b) (1'5 Puntos). Determina, si existe, una matriz Y que verifique $A^2YB^{-1}=A$

a) Calculamos los determinantes de A y B

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2-1=1 \qquad ; \qquad |B|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0-2=-2$$

$$|X^3AX|=|B^2| \xrightarrow{Paso 1} =|X|\cdot|X|\cdot|X|\cdot|A|\cdot|X|=|B|\cdot|B| \Rightarrow |X|^4\cdot 1=(-2)\cdot(-2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow |X|=\sqrt[4]{4}=\pm\sqrt{2}$$

En el paso 1 hemos aplicado la propiedad: $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$

b) Si multiplicamos por $(A^2)^{-1}$ a la izquierda y por B a la derecha, nos queda:

$$(A^2)^{-1}\cdot A^2\cdot Y\cdot B^{-1}\cdot B=(A^2)^{-1}\cdot A\cdot B \Rightarrow Y=A^{-1}\cdot B$$

Calculamos la matriz inversa de A

$$A^{-1}=\frac{(A^{adj})^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Luego:

$$Y=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Ejercicio 8

Sean $A = (a_{ij})_{m,n}$, $B = (b_{ij})_{n,p}$, $C = (c_{ij})_{q,r}$. ¿Qué condiciones deben cumplir p, q y r para que se puedan efectuar las siguientes operaciones?

a) $A \cdot C \cdot B$ **b) $A \cdot (B + C)$**

Solución

Sean $A = (a_{ij})_{m,n}$, $B = (b_{ij})_{n,p}$, $C = (c_{ij})_{q,r}$. ¿Qué condiciones deben cumplir p, q y r para que se puedan efectuar las siguientes operaciones?

a) $A \cdot C \cdot B$ **b) $A \cdot (B + C)$**

a) $n = q = r$ b) $n = q$; $p = r$