EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2021

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 1: MATRICES

- Junio, Ejercicio A2
- Reserva 1, Ejercicio A2
- Reserva 2, Ejercicio A2
- Reserva 3, Ejercicio A2
- Reserva 4, Ejercicio A1
- Julio, Ejercicio A1

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con m un parámetro real.

a) ¿Para qué valores del parámetro m existe la matriz inversa de A?.

b) Para $m=2$, resuelva la ecuación matricial $X\cdot A-A^2=I_3$.

SOCIALES II. 2021 JUNIO. EJERCICIO A2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}=2+3m-2m^2+3=-2m^2+3m+5=0\Rightarrow m=-1\ ;\ m=\frac{5}{2}$$

Luego, la matriz A tiene inversa para todos los valores de $m\neq -1$ y $m\neq \frac{5}{2}$.

b) $X\cdot A-A^2=I_3\Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}-A^2\cdot A^{-1}=I_3\cdot A^{-1}\Rightarrow X-A=A^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}+A$

Calculamos la inversa

$$A^{-1}=\frac{(A^{adj})^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 5 & -6 & -4 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^t}{3}=\frac{\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}}{3}=\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & -1 & 1 \\ -\frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Luego:

$$X=A^{-1}+A=\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & -1 & 1 \\ -\frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ -2 & 1 & -2 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&-1\\2&1&0\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$

a) Calcule A^2, A^3, A^4 **y deduzca la expresión de** A^n**, con** ***n*** **un número natural**

b) Razone si existe la inversa de la matriz ***B*****.**

c) Razone si la ecuación matricial $B\cdot X=C$ **tiene solución y resuélvala en caso de que sea posible.**

SOCIALES II. 2021 RESERVA 1. EJERCICIO A2

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&4\\0&1&0\\4&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2&0&2^2\\0&1&0\\2^2&0&2^2\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^2\cdot A^2=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&8\\0&1&0\\8&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^3&0&2^3\\0&1&0\\2^3&0&2^3\end{pmatrix}$$

Luego, $A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&1&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}$

b) Calculamos el determinante de B

$$|B|=\begin{vmatrix}1&0&2\\1&1&-1\\2&1&0\end{vmatrix}=2-4+1=-1\neq 0\Rightarrow \text{ Si tiene inversa}$$

c) Como B tiene inversa, la ecuación matricial tiene solución

$$B\cdot X=C\Rightarrow B^{-1}\cdot B\cdot X=B^{-1}\cdot C\Rightarrow X=B^{-1}\cdot C$$

Calculamos la matriz inversa de B

$$B^{-1}=\frac{(B^{adj})^t}{|B|}=\frac{\begin{pmatrix}1&-2&-1\\2&-4&-1\\-2&3&1\end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix}1&2&-2\\-2&-4&3\\-1&-1&1\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\2&4&-3\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$X=B^{-1}\cdot C=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\2&4&-3\\1&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-13\\-3\end{pmatrix}$$

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule el valor del parámetro *a* para que la matriz *A* no tenga inversa.
b) Para $a=3$, resuelva la ecuación matricial $X\cdot A - X\cdot B = C$
c) Para $a=3$, compruebe que $A^2=11\cdot A$ y exprese A^8 en función de la matriz *A*.
SOCIALES II. 2021 RESERVA 2. EJERCICIO A2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz *A*.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}=8a-24=0 \Rightarrow a=3$$

La matriz *A* no tiene inversa para $a=3$, ya que su determinante vale 0.

b) Resolvemos la ecuación matricial $X\cdot A - X\cdot B = C$ para $a=3$

$$X\cdot A - X\cdot B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+6b & 4a+8b \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2a+3b & 2a+3b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{matrix} a+3b=1 \\ 2a+5b=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a=1 \,;\, b=0$$

Luego, $X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Comprobamos si $A^2=11\cdot A$, para $a=3$

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 33 & 44 \\ 66 & 88 \end{pmatrix}$$

$$11\cdot A=11\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 33 & 44 \\ 66 & 88 \end{pmatrix}$$

Luego, si es cierto

Calculamos A^8 en función de *A*

$$A^8=A^2\cdot A^2\cdot A^2\cdot A^2=11A\cdot 11A\cdot 11A\cdot 11A=11^4\cdot A^2\cdot A^2=11^4\cdot 11A\cdot 11A=11^6\cdot A^2=$$
$$=11^6\cdot 11A=11^7\cdot A$$

Se considera la ecuación matricial $(10I_3 - A)\cdot X = B$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y B es una matriz con tres filas y una columna.

a) Razone qué dimensión ha de tener la matriz X.

b) ¿Tiene solución la ecuación matricial anterior para cualquier matriz B de orden 3x1?. ¿Por qué?.

c) Resuelva dicha ecuación matricial si $B = \begin{pmatrix} 5 & 20 & -3 \end{pmatrix}^t$.

SOCIALES II. 2021 RESERVA 3. EJERCICIO A2

R E S O L U C I Ó N

a) $(10I_3 - A)_{(3,3)}\cdot X_{(m,n)} = B_{(3,1)} \Rightarrow m = 3 \,;\, n = 1$

Luego, la matriz X es de orden 3x1.

b) $(10I_3 - A)\cdot X = B \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \Rightarrow C\cdot X = B$

Como el determinante de la matriz $C = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ es:

$$|C| = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ -2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 320 - 20 = 300 \neq 0 \Rightarrow \text{La matriz C tiene inversa, luego:}$$

$$C\cdot X = B \Rightarrow X = C^{-1}\cdot B$$

Por lo tanto, la ecuación siempre tiene solución para cualquier matriz *B*.

c)

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 8x - y = 5 \\ -4x + 8y = 20 \\ -2x - 2y + 5z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1 \,;\, y = 3 \,;\, z = 1$$

Luego, la matriz X es: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Se considera la matriz $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$

a) Calcule $\boldsymbol{A^{40}}$ **y** $\boldsymbol{\left(A^{t}\right)^{30}}$

b) Calcule $\boldsymbol{\left(A^{-1}+A\right)^{2}}$

c) Resuelva la ecuación matricial $\boldsymbol{\left(A^{t}+I_{2}\right)\cdot X=A^{t}-I_{2}}$

SOCIALES II. 2021 RESERVA 4. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A^{2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{3}=A^{2}\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{4}=A^{2}\cdot A^{2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $A^{40}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -40 & 1 \end{pmatrix}$

b) Calculamos la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{(A^{d})^{t}}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{t}}{1}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^{-1}+A\right)^{2}=\left(A^{-1}+A\right)\cdot\left(A^{-1}+A\right)=\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Resolvemos la ecuación matricial

$$\left(A^{t}+I_{2}\right)\cdot X=A^{t}-I_{2}\Rightarrow\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{aligned} 2a-c&=0 \\ 2b-d&=-1 \\ 2c&=0 \\ 2d&=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow a=0\ ;\ b=-\frac{1}{2}\ ;\ c=0\ ;\ d=0$$

Luego, $X=\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$

a) Determine para qué valores del parámetro *a*, la matriz *A* tiene inversa.
b) Para $a=1$, calcule la inversa de *A*
c) Para $a=1$, resuelva la ecuación matricial $A\cdot X=B^t$, siendo $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
SOCIALES II. 2021 JULIO. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de *A*.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix}=-a-8=0 \Rightarrow a=-8$$

Tiene inversa para todos los valores de $a \neq -8$

b) Calculamos la inversa para $a=1$

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}^t}{-9}=\frac{\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}}{-9}=\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

c) $A\cdot X=B^t \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B^t \Rightarrow X=A^{-1}\cdot B^t$

$$X=A^{-1}\cdot B^t=\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$