

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1
- Junio, Ejercicio 2
- Reserva 1, Ejercicio 1
- Reserva 1, Ejercicio 2
- Reserva 2, Ejercicio 1
- Reserva 2, Ejercicio 2
- Reserva 3, Ejercicio 1
- Reserva 3, Ejercicio 2
- Reserva 4, Ejercicio 1
- Reserva 4, Ejercicio 2
- Julio, Ejercicio 1
- Julio, Ejercicio 2

Se sabe que la gráfica de la función f definida por $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x - 1}$ (para $x \neq 1$) tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(1,1)$ y tiene pendiente 2. Calcula a y b .

MATEMÁTICAS II. 2021. JUNIO. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

La asíntota oblicua tiene de ecuación $y = mx + n$. Como es una función racional podemos calcular la asíntota oblicua dividiendo los dos polinomios

Dividiendo los dos polinomios, tenemos que:

$$\begin{array}{r}
 ax^2 + bx + 2 \\
 \underline{-ax^2 + ax} \\
 (a+b)x + 2 \\
 \underline{-(a+b)x + a + b} \\
 2 + a + b
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x - 1 \\
 \hline
 ax + (a + b)
 \end{array}$$

Luego, la asíntota oblicua tiene de ecuación: $y = ax + a + b$

Como la pendiente es 2 $\Rightarrow a = 2$

Como nos dicen que pasa por el punto $(1,1) \Rightarrow 1 = 2 \cdot 1 + 2 + b \Rightarrow b = -3$

Luego: $a = 2$; $b = -3$

Considera la función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} (3x-6) \cdot e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{36(\sin(x)-ax)}{x^3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

a) Calcula a .

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

MATEMÁTICAS II. 2021. JUNIO. EJERCICIO 2

RESOLUCIÓN

a) Como la función es continua en $\mathbb{R} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Por lo tanto:

$$f(0) = -6 \cdot e^0 = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (3x-6) \cdot e^x = -6 \cdot e^0 = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{36(\sin(x)-ax)}{x^3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{36(\cos(x)-a)}{3x^2} = \frac{36(1-a)}{0}$$

Como la función es continua, el límite tiene que existir y ser finito, luego: $36(1-a) = 0 \Rightarrow a = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{36(\sin(x)-ax)}{x^3} &= \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{36(\cos(x)-1)}{3x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{36(-\sin(x))}{6x} = \frac{0}{0} \\ &\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{36(-\cos(x))}{6} = \frac{-36}{6} = -6 \end{aligned}$$

b) Calculamos la recta tangente en $x = -1$: $y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x+1)$

$$- f(-1) = (-3-6) \cdot e^{-1} = -9 \cdot e^{-1} = -\frac{9}{e}$$

$$- f'(x) = 3 \cdot e^x + (3x-6) \cdot e^x = (3x-3) \cdot e^x \Rightarrow f'(-1) = -6 \cdot e^{-1} = -\frac{6}{e}$$

Sustituyendo, tenemos que: $y + \frac{9}{e} = -\frac{6}{e} \cdot (x+1) \Rightarrow y = \frac{-6x-15}{e}$

Calcula a , b , c y d sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un punto de inflexión en $(0,4)$ y su recta normal en el punto $(1,8)$ es paralela al eje de ordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 1. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

La función será: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c ; f''(x) = 6ax + 2b$$

- El punto $(0,4)$ es un punto de inflexión de la gráfica de f

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Pasa por } (0,4) \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 4 \Rightarrow d = 4 \\ f''(0) = 0 \Rightarrow 6a \cdot 0 + 2b = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

- La recta normal tiene de ecuación: $y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x-1) \Rightarrow y - 8 = -\frac{1}{f'(1)}(x-1)$

Y como es paralela al eje de ordenadas $\Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow 3a + c = 0$

- Además, sabemos que pasa por $(1,8) \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 8 \Rightarrow a + c + 4 = 8 \Rightarrow a + c = 4$

Resolviendo el sistema formado por: $\begin{cases} 3a + c = 0 \\ a + c = 4 \end{cases} \Rightarrow a = -2 ; c = 6$

Luego: $a = -2 ; b = 0 ; c = 6 ; d = 4 \Rightarrow f(x) = -2x^3 + 6x + 4$

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3}$ para $(x \neq -3, x \neq 1)$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f .

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 1. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{-3, 1\}$.

Asíntotas Verticales: En principio son las rectas $x = -3$ y $x = 1$. Vamos a comprobarlo

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

Luego $x = -3$ es una asíntota vertical

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3} = \frac{-9}{0^+} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3} = \frac{-9}{0^-} = +\infty$$

Luego $x = 1$ es una asíntota vertical

Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y = 1$$

Luego $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Asíntota Oblicua: No tiene, ya que tiene asíntota horizontal

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y' = \frac{2x^2 + 14x + 20}{(x^2 + 2x - 3)^2} = 0 \Rightarrow x = -2 ; x = -5$

| | | | | | |
|---------------|-----------------|------------|------------|-----------|----------------|
| | $(-\infty, -5)$ | $(-5, -3)$ | $(-3, -2)$ | $(-2, 1)$ | $(1, +\infty)$ |
| Signo $f'(x)$ | + | - | - | + | + |
| Función | C | D | D | C | C |

Creciente: $(-\infty, -5) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$

Decreciente: $(-5, -3) \cup (-3, -2)$

Máximo en $\left(-5, -\frac{5}{4}\right)$ y mínimo en $(-2, 2)$

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{\ln(x+1)} - \frac{a}{x} \right)$ es finito, calcula a y el valor del límite (ln denota el logaritmo neperiano).

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 2. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{\ln(x+1)} - \frac{a}{x} \right) = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + x - a \cdot \ln(x+1)}{x \cdot \ln(x+1)} \right) = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1 - \frac{a}{x+1}}{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}} = \frac{1-a}{0}$$

Como nos dicen que el límite existe y es finito, el numerador debe de ser igual a cero para poder seguir aplicando la regla de L'Hôpital, luego: $1-a=0 \Rightarrow a=1$.

Calculamos el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1 - \frac{1}{x+1}}{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}} = \frac{2+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{ax^2 + b}{a - x}$ (para $x \neq a$).

a) Halla a y b sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $(2,3)$ y tiene una asíntota oblicua cuya pendiente vale -4 .

b) Para $a = 2$ y $b = 3$, calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 2. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) La asíntota oblicua tiene de ecuación $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + b}{x \cdot (a - x)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax}{a - 2x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2a}{-2} = -a = -4 \Rightarrow a = 4$$

$$f(2) = 3 \Rightarrow \frac{4 \cdot 2^2 + b}{4 - 2} = 3 \Rightarrow 16 + b = 6 \Rightarrow b = -10$$

b) Calculamos $f(1)$ y $f'(1)$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{2 - x} \Rightarrow f(1) = \frac{2 + 3}{2 - 1} = 5$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{2 - x} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x \cdot (2 - x) + 1(2x^2 + 3)}{(2 - x)^2} = \frac{-2x^2 + 8x + 3}{(2 - x)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{-2 + 8 + 3}{(2 - 1)^2} = 9$$

Sustituyendo, tenemos que:

La ecuación de la tangente es: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 5 = 9(x - 1) \Rightarrow y = 9x - 4$

La ecuación de la normal es: $y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)} \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 5 = -\frac{1}{9}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{x}{9} + \frac{46}{9}$

Sea la función derivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(1+x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(ln denota la función logaritmo neperiano)

a) Determina a y b .

b) Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 3. EJERCICIO 1.

R E S O L U C I Ó N

a) La función es derivable, luego, tiene que ser continua.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax+b}{x-1} = -b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1+x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\text{Calculamos } f'(x) = \begin{cases} \frac{a \cdot (x-1) - (ax+b)}{(x-1)^2} = \frac{-a-b}{(x-1)^2} = \frac{-a}{(x-1)^2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como es derivable se cumple que: $f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1$

b) Calculamos $f(2)$ y $f'(2)$

$$f(2) = \ln 3$$

$$f'(2) = \frac{1}{3}$$

La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Rightarrow y - \ln 3 = \frac{1}{3}(x - 2)$

La ecuación de la recta normal en $x = 2$ es $y - f(2) = -\frac{1}{f'(2)} \cdot (x - 2) \Rightarrow y - \ln 3 = -3 \cdot (x - 2)$

Halla a , b y c sabiendo que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(x) + c \cdot \text{sen}(2x)$ tiene un punto crítico en el punto de abscisa $x = \pi$ y la recta $y = -\frac{1}{2}x + 3$ es normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 3. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Calculamos su derivada primera: $f'(x) = b \cdot \cos x + 2c \cdot \cos 2x$

- Punto de crítico en $x = \pi \Rightarrow f'(\pi) = 0 \Rightarrow b \cdot \cos \pi + 2c \cdot \cos 2\pi = 0 \Rightarrow -b + 2c = 0$

- La recta normal en $x = 0$ es: $y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x - 0)$

$$- f(0) = a + b \cdot \text{sen}(0) + c \cdot \text{sen}(0) = a$$

$$- f'(0) = b \cdot \cos 0 + 2c \cdot \cos 0 = b + 2c$$

Sustituyendo e igualando a la ecuación normal que nos dan, tenemos que:

$$y - a = -\frac{1}{b+2c}(x-0) = -\frac{1}{b+2c}x \Rightarrow y = -\frac{1}{b+2c}x + a = -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow \begin{cases} b+2c = 2 \\ a = 3 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones obtenidas

$$\left. \begin{array}{l} -b+2c=0 \\ b+2c=2 \\ a=3 \end{array} \right\} \Rightarrow a=3 ; b=1 ; c=\frac{1}{2}$$

Sea la función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(e^x + x^3)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 4x^2 + a & \text{si } 0 \leq x < 1. \\ b + \text{sen}(\pi x) & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$

(\ln denota la función logaritmo neperiano). Determina a y b .

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 4. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

Como la función es continua en \mathbb{R} , tiene que ser continua en $x=0$ y $x=1$.

Estudiamos la continuidad en $x=0$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(e^x + x^3)}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + 3x^2}{e^x + x^3} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 4x^2 + a = a \end{array} \right\} \Rightarrow a = 1$$

Estudiamos la continuidad en $x=1$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} 4x^2 + a = 4 + a = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} b + \text{sen}(\pi x) = b + \text{sen} \pi = b \end{array} \right\} \Rightarrow b = 5$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

- a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f .
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 4. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el dominio de la función.

$$e^{2x} + 1 = 0 \Rightarrow e^{2x} = -1 \Rightarrow \text{No tiene solución, luego el dominio es } \mathbb{R}$$

Asíntota vertical: No tiene, ya que el dominio es \mathbb{R} .

Asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{2e^{2x}} = 1 \Rightarrow y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^{-\infty} - 1}{e^{-\infty} + 1} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow y = -1$$

Luego, $y = 1$ es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y $y = -1$ es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$

Asíntota oblicua: No tiene, ya que tiene asíntota horizontal.

b) Calculamos la derivada y la igualamos a 0

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x} + 1) - 2e^{2x}(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

Como $f'(x) > 0$ para cualquier valor de x , la función es creciente en \mathbb{R} .

Calcula a y b sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(1 - \cos(x)) + b \operatorname{sen}(x) - 2(e^x - 1)}{x^2} = 7$

MATEMÁTICAS II. 2021. JULIO. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(1 - \cos(x)) + b \operatorname{sen}(x) - 2(e^x - 1)}{x^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Aplicamos la regla de L'Hopital}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \operatorname{sen}(x) + b \cos(x) - 2e^x}{2x} = \frac{b-2}{0} \Rightarrow$$

Como el límite es finito, entonces, $b-2=0 \Rightarrow b=2$ y podemos seguir aplicando la regla de L'Hopital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \operatorname{sen}(x) + 2 \cos(x) - 2e^x}{2x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Aplicamos la regla de L'Hopital}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \cos(x) - 2 \operatorname{sen}(x) - 2e^x}{2} = \frac{a-2}{2} = 7 \Rightarrow a=16$$

Luego, los valores son: $a=16$; $b=2$

Halla $a > 0$ y $b > 0$ sabiendo que la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{bx^2}{1+ax^4}$

tiene en el punto $(1,2)$ un punto crítico.

MATEMÁTICAS II. 2021. JULIO. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera derivada

$$f'(x) = \frac{2bx(1+ax^4) - bx^2(4ax^3)}{(1+ax^4)^2} = \frac{2bx - 2abx^5}{(1+ax^4)^2}$$

Como tiene un punto crítico en $(1,2)$, tenemos que:

$$f'(1) = 0 \Rightarrow \frac{2b - 2ab}{(1+a)^2} = 0 \Rightarrow 2b - 2ab = 0 \Rightarrow 2b(1-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \text{No sirve} \\ 1-a = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow \frac{b \cdot 1^2}{1+1 \cdot 1^4} = 2 \Rightarrow b = 4$$

Luego, $a=1$ y $b=4$